# Arte con lenguaje matemático

*Moratalla, Ascensión* ascensión.moratalla.delahoz@upm.es
*Dpto de Matemática Aplicada ETS Arquitectura de Madrid*
*Universidad Politécnica de Madrid*

*Sanz, Agripina* asanz@caminos.upm.es
*Dpto de Matemática Aplicada ETSI de Caminos Canales Y Puertos de Madrid*
*Universidad Politécnica de Madrid*

## RESUMEN

En este artículo mostramos la experiencia realizada con alumnos de primer curso de la ETSA de la Universidad Politécnica de Madrid, basada en el análisis de obras arquitectónicas y de arte con lenguaje matemático.

***Palabras claves*:**

Matemáticas, arte, arquitectura.

## ABSTRACT

In this paper we present the experience carried out with first-course students from ETSA (Superior Technical School of Architecture) in the Politechnical University of Madrid, based on the analysis of Art and Architecture master pieces by means of mathematical language.

***Keywords***

Mathematics, Arts, Architecture.

# 1. INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de las matemáticas como en cualquier otra rama, es importante aplicar los conocimientos que se estudian a ejemplos directos a los estudios específicos del alumno.

Os mostramos cómo nuestros alumnos se introducen en los distintos contenidos de su temario a través del análisis geométrico de obras de arte y arquitectura.

# 2. EL CONTENIDO MATEMÁTICO

El contenido matemático, objeto de estudio corresponde al primer curso de ingeniería y arquitectura impartidos en la UPM, es el siguiente:

- Espacio afín euclídeo. Isometrías. Semejanzas.
- Cónicas.
- Cuádricas.

Para cada uno de estos bloques hemos seleccionado temas muy ligados al diseño en Arquitectura y arte. En el caso de geometría euclídea, el grupo de las isometrías nos lleva de una forma sencilla a poder hablar de grupos de Leonardo, frisos y mosaicos. En $R^2$ las únicas isometrías son los giros, las simetrías axiales y las traslaciones. En los diseños basados en grupos de Leonardo las únicas isometrías que intervienen son los giros alrededor de un centro y las simetrías axiales con ejes que pasan por ese centro. En este caso hay un punto fijo, el centro, y los diseños que se obtienen están organizados en torno a él.

Un friso es un elemento de ornamentación que encontramos sobre todo en la arquitectura clásica. Consiste en la repetición de un determinado módulo, figura o motivo, a lo largo de una banda, siguiendo una dirección. Esta repetición marca el ritmo del friso. Desde el punto de vista matemático podemos realizar un estudio del grupo de simetría del friso analizando las isometrías que intervienen en el diseño. Si bien el motivo de un friso se puede elegir libremente, los grupos de simetría que generan frisos se reducen a siete y cumplen la característica que dejan invariante una recta.

Los mosaicos son más complejos y reducimos su elección a arabescos y mosaicos de Escher. Se definen como la repetición de un módulo en dos direcciones de manera que se consiga un recubrimiento del plano.

El tema de cónicas tiene innumerables ejemplos a los que podemos recurrir: las plazas renacentistas de tipo elíptico, diseños con secciones de distintas cuádricas....

En cuanto a las cuádricas, algunas de ellas, son de gran aplicación en arquitectura, por lo que numerosos arquitectos e ingenieros las utilizan para diseñar sus obras (Gaudí, Torroja, Candela, Calatrava, Dieste, …)

Os mostramos a continuación trabajos realizados por nuestros alumnos.

# CÚPULA DE SANT'IVO ALLA SAPIENZA

DE

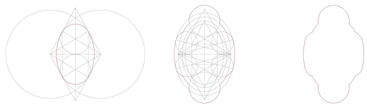
FRANCESCO **BORROMINI**

## HISTORIA y GEOMETRÍA

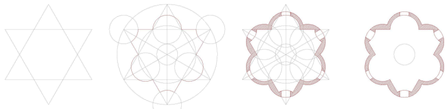
Borromini, el autor de la iglesia de Roma Sant Ivo alla Sapienza. Se le considera uno de los principales innovadores de la historia de la arquitectura e iniciador de la revolucionaria arquitectura barroca. Frente a los trucos y escenografías de sus contemporáneos siempre tuvo una confianza absoluta en la geometría como principal herramienta para la construcción arquitectónica. Aquella que logra la más correcta interrelación entre espacialidad y estructura de soporte. Su obra se basó siempre en simples elementos geométricos, triángulos y círculos y cuya manipulación espacial, mediante prismas, cilindros y casquetes esféricos, se tradujo en una arquitectura admirada desde siempre.

Pero Borromini creía en el ejemplo infalible de la naturaleza, como la fuente de inspiración principal para sus obras de arte. La naturaleza como representación del concepto de la divinidad. Para los arquitectos de esa época, el arquitecto debía representar la perfección y armonía de la naturaleza, a partir de la referencia a los restos y modelos heredados de la antigüedad griega y romana. Las ideas platónicas sobre lo natural, se expresarían principalmente a través de las matemáticas, las relaciones numéricas y la combinatoria de los cinco sólidos pitagóricos. Alberti consideraba que las iglesias debían responder necesariamente en su trazado al círculo y a la esfera como formas que reflejan la máxima aproximación a una perfecta simetría y con ello, constituirían el emblema más representativo de la belleza implícita en la idea de Dios. Los elementos geométricos más sencillos constituirían así la base para el desarrollo de edificios religiosos cuya simbología quiere expresar esa idea de perfección y de interpretación de lo natural como imagen representativa de la divinidad.

En 1634, Borromini recibió el encargo de la construcción del monasterio e iglesia de San Carlino alle Quatro Fontane. Una idea inicial partiría de la figura del óvalo, trazada de acuerdo al sistema de triangulaciones. Una articulación geométrica de dos pares de triángulos equiláteros de distinta dimensión, conjuntados formando un rombo y una estrella de David entrelazados y que permiten dibujar fácilmente apoyados en sus vértices una forma ovalada simple. La simpleza conceptual y la totalidad espacial se perciben entonces con un solo recorrido visual, una vez se atraviesa la puerta principal, pudiendo así comprenderse admirativamente todo el alcance de la genialidad del arquitecto.



En 1643 recibió el encargo de una segunda iglesia cuya construcción supondría también un campo experimental para la consagración de la espacialidad barroca. Aquí Borromini vuelve a recurrir a sus apreciados círculos y triángulos equiláteros, organizados sobre una única estrella de David. En este caso, para conformar una iglesia de planta central y capillas laterales integradas. El trazado se organiza sobre puntas alternas y para ello se disponen tres círculos en los vértices exteriores y otros tres en el centro de los lados de los triángulos, formándose así interiormente, la característica forma de la planta de la iglesia. Afuera, el arquitecto dispone seis círculos iguales concéntricos que definen la característica volumetría exterior del edificio. El espacio interior se remata con una cúpula formada por gajos esféricos. El efecto expansivo conjunto genera un efecto dinámico altamente expresivo.



Con ello, Borromini logra su ideal de espacio unitario estableciendo una continuidad total desde el suelo hasta la linterna que remata la cúpula. Efecto que se construye sobre la base de elementos geométricos totalmente simples, planos verticales sectores cilíndricos y gajos esféricos que, junto a la luz establecen un recinto interior de una grandeza luminosa.

Borromini ha pasado a la historia como uno de los más brillantes artistas que nos ha legado el barroco italiano.

VISTA EXTERIOR DE LA CÚPULA

PLAZA CENTRAL ANTE LA IGLESIA

DEAMBULATORIO

## COMPOSICIÓN

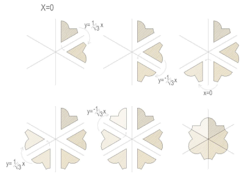
La composición de la planta de la cúpula se puede entender de varias maneras, por medio de simetrías, o simetrías y giros.

Si dividimos una circunferencia en 6 partes iguales, es decir, en 60º, tenemos 6 ejes, que por simetría serían 3. Estos ejes son:

$Y=\frac{1}{\sqrt{3}}X$

$Y=\frac{-1}{\sqrt{3}}X$

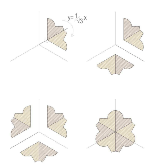
$X=0$




La matriz de la primera simetría es: $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Realizando esta simetría 4 veces más y cambiando el eje de manera consecutiva tenemos el figura final

Por medio de una simetría obtenemos el motivo mínimo para hallar la figura girándola. Después de la simetría vista en el apartado anterior giramos el motivo $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$




La matriz del grupo de Leonardo es $= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Para el caso del giro $\frac{2\pi}{3}$: $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

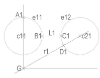
Realizando este giro una vez mas, pero con $\frac{4\pi}{3}$ obtenemos la figura total

FOTO DEL INTERIOR DE LA CÚPULA, DONDE SE PUEDE APRECIAR LA GEOMETRÍA CON LA QUE SE COMPUSO

## MAPLE

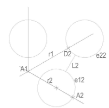
Para componer esta figura en Maple partimos por ifentificar el centro de la figura con el origen de coordenadas, y de ahí situamos los centros de dos circunferias, las circuenferencias, una línea que une ambas circunferencias y el primer eje de simetría, como se muestra a continuación:

```
point(A1,[0,1.366]):
point(B1,[0.5,0.866]):
point(C1,[1,0.866]):
point(D1,[1.067,0.616]):
point(G,[0,0]):
point(c11,[0,0.866]):
point(c21,[1.5,0.866]):
segment(L1,[B1,C1]):
line(r1,[G,D1]):
circle(e11,[c11,0.5]):
circle(e21,[c21,0.5]):
```



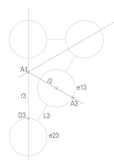

A continuación empezamos realizando la primera simetría, en este caso sobre el eje **r1:**

```
reflection(e12,e11,r1):
reflection(e22,e21,r1):
reflection(L2,L1,r1):
reflection(A2,A1,r1):
reflection(D2,D1,r1):
line(r2,[G,A2]):
```



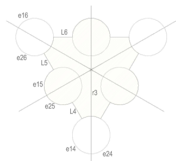

La siguiente simetría se realiza respecto al eje **r2:**

```
reflection(e13,e12,r2):
reflection(e23,e22,r2):
reflection(L3,L2,r2):
reflection(A3,A2,r2):
reflection(D3,D2,r2):
line(r3,[G,D3]):
```

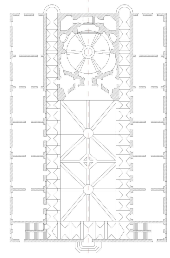



La manera más corta para acabar es hacer una simetría de todos los elementos sobre el eje **r3:**

```
reflection(e16,e11,r3):
reflection(e15,e12,r3):
reflection(e14,e13,r3):
reflection(e26,e21,r3):
reflection(e25,e22,r3):
reflection(e24,e23,r3):
reflection(L6,L1,r3):
reflection(L5,L2,r3):
reflection(L4,L3,r3):
```



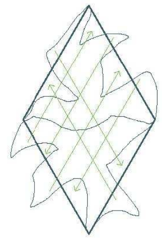

## RESTO DEL EDIFICIO



En el resto del edificio encontramos un eje de simetría principal. Además la composición de la planta parte de figuras perfectas como círculos, cuadrados, rectángulos aureos y proporciones aureas representando así lo que se entendía en el Barroco como belleza perfecta.

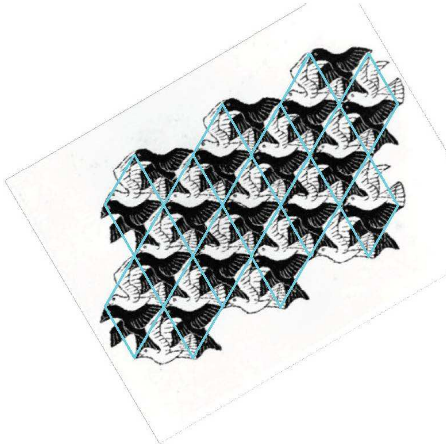
RODRIGO GONZÁLEZ MARTÍN

## traslación

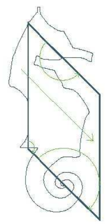


El motivo mínimo a partir del cual se construye este mosaico es el rombo.

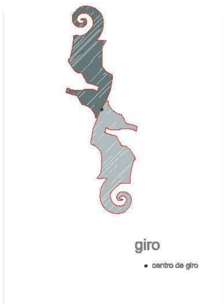
En él se dibujan dos aves (una blanca y otra negra). Las partes exteriores al rombo, se trasladan al interior según las direcciones señaladas.



## giro y traslación

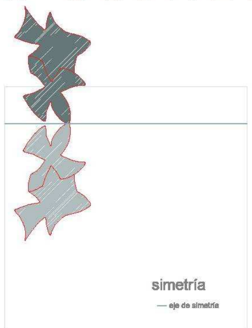


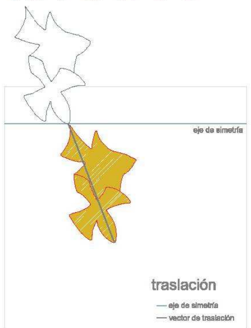
Como muestra el esquema el caballito puede contenerse en un paralelogramo, mediante la traslación y giros de algunas de sus partes.

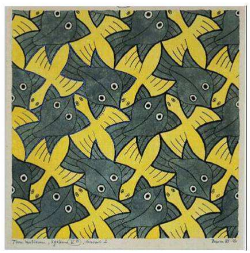




## simetría con deslizamiento



## Isometrías en el plano

# Escher

Se puede explicar la obra de M.C. Escher mediante el estudio de las isometrías.

"Deambulo en completa soledad por el jardín de la partición periódica de la superficie. Por más satisfactorio que sea poseer un dominio, en este caso resulta imposible estar solo.
(...) Mucho antes de que, a raíz de visitar la Alhambra, descubriera cuán afín me es el problema de la partición (...), yo había descubierto ya por mí mismo mi interés por él."

M. C. Escher, Regelmatige vlakverdeling, Utrecht, 1958.

El mosaico se construye a partir de un giro y una traslación de un caballito de mar en tres colores distintos (azul, rojo y blanco).

Desde un punto de vista geométrico el motivo mínimo es un paralelogramo.

En este mosaico el dibujo repetido es un ave amarilla y un pez azul.

La figura puede traducirse como la composición de dos movimientos:

- simetría respecto de un eje horizontal
- deslizamiento según la dirección y sentido señalados.

Javier Montalvo Melguizo Violeta Ordóñez Manjón.

## 3. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alsina, C. y Trillas, E. Lecciones de Álgebra y Geometria, Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1984.

[2] Barnsley, M., Fractals Everywhere, Academic Press, San Diego, 1988.

[3] Coxeter, H.S.M.y Greitzer, S.L. Retorno a la Geometría, DLS Euler Editores, 1993.

[4] Falconer, K.J. Fractal Geometry. New York, 1990.

[5] Moratalla de la Hoz, A., Sanz García, Mª A., Geometría en la Arquitectura. Serie Geometría y Arquitectura (I). Pub. del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM, 1998.

[6] Moratalla de la Hoz, A., Sanz García, Mª A., Simetría. Serie Geometría y Arquitectura (II). Pub. del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM, 1999.

[7] Perera, Jorge G., Perera, Jorge H. y Vera W. de Spinadel, Geometría Fractal, 3ª Edición, Editorial Nueva Librería. Buenos Aires, 2007.

[8] Quaroni, L. Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura, Xarait Ediciones. Madrid 1987.

[9] Vera W. de Spinadel, From the Golden Mean to Chaos, 2ª Edición, Editorial Nobuko S.A. Buenos Aires, 2004.